

CAPITULO 5

CONCEPTOS BASICOS DE MAQUINAS ROTATORIAS

5.1.- Introducción

En este capítulo, se describen en forma breve y elemental, tres tipos de máquinas rotatorias (síncrona, de inducción y de corriente continua), cuyos principios básicos son esencialmente los mismos. En ellas, las tensiones se inducen debido al movimiento relativo de un campo magnético respecto a un devanado (grupos de bobinas girando dentro de un campo magnético fijo o viceversa, o bien variando la reluctancia al girar el rotor) y el torque se produce por la interacción entre los campos magnéticos del estator (parte fija de la máquina) y del rotor (parte móvil). La Figura 5.1 muestra en forma esquemática estos tres tipos de máquinas.

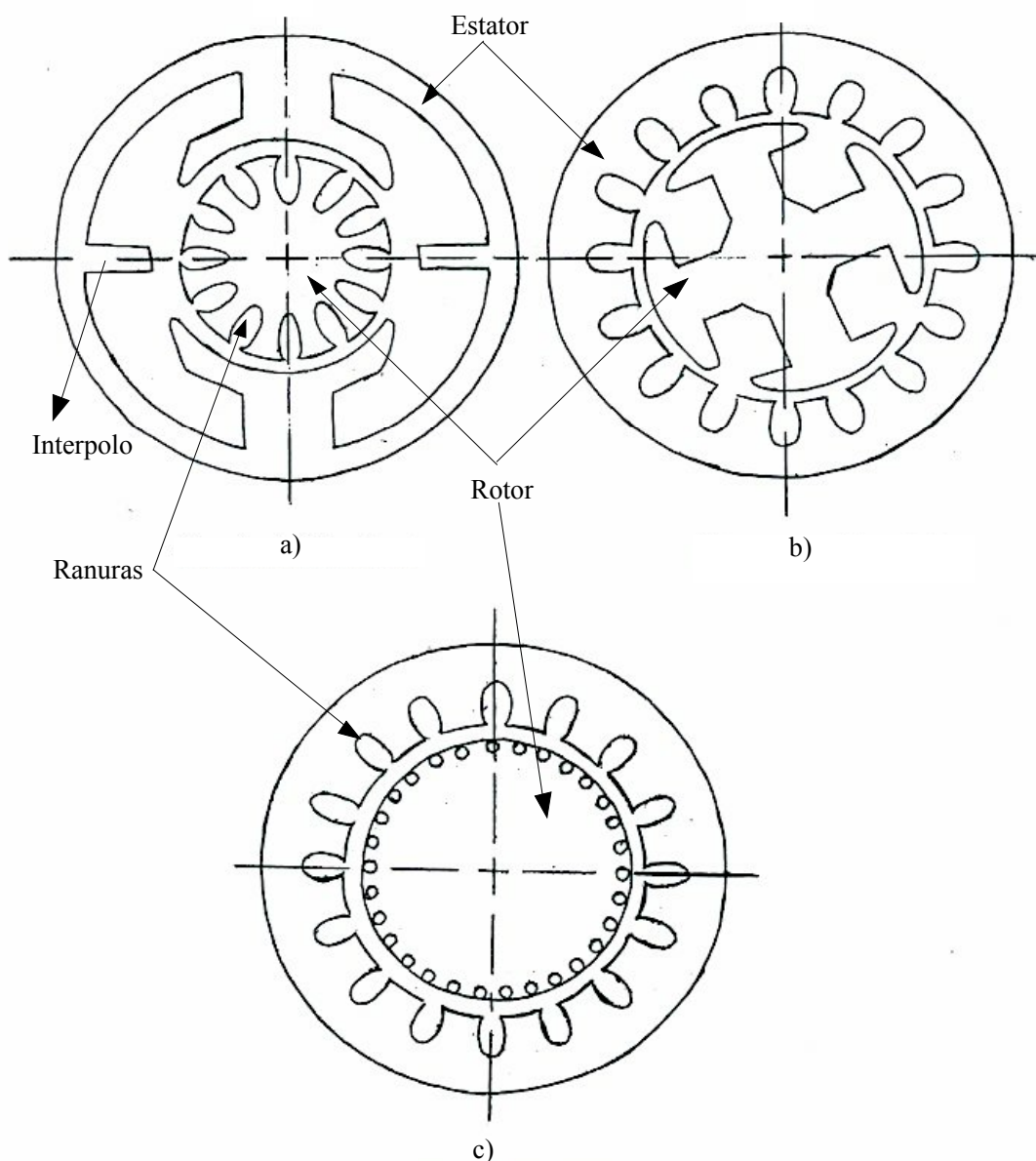


Figura 5.1.- Estructuras magnéticas de Máquinas Eléctricas Rotatorias: a) Corriente Continua; b) Síncrona o Sincrónica; c) Asíncrona o de Inducción

5.2.- Consideraciones generales

5.2.1.- Máquinas síncronas elementales

La Figura 5.2 muestra una máquina síncrona elemental de dos polos (operando como generador de corriente alterna). En la mayoría de los casos, el devanado inducido, está ubicado en el estator. El inductor se excita con corriente continua (C.C.) a través de contactos o “escobillas” de carbón apoyadas sobre “anillos rozantes”. Como el inductor es de menor potencia, es más práctico que esté ubicado en el rotor.

El devanado inducido está formado por N espiras, representada en la Figura por a y a' , alojadas en dos ranuras diametralmente opuestas practicadas en la parte interior del estator.

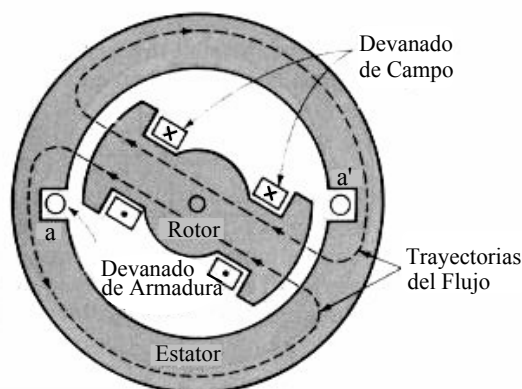


Figura 5.2.- Generador síncrono elemental de polos salientes

Los conductores que forman los laterales de esta bobina son paralelos al eje de la máquina y están conectados en serie. El rotor gira a velocidad uniforme en virtud de una potencia mecánica aplicada a su eje. La distribución radial de la densidad de flujo B en el entrehierro, es función de la posición del rotor. En las máquinas reales, puede conseguirse que la onda de B tenga una forma aproximadamente sinusoidal, tal como se muestra en la Figura 5.3 a), perfilando adecuadamente las expansiones polares. Al girar el rotor, la onda de flujo barre los laterales a y a' de la bobina, induciéndose en ella una tensión que es función del tiempo y que tiene la misma forma que la distribución espacial de B , (Figura 5.3 b)

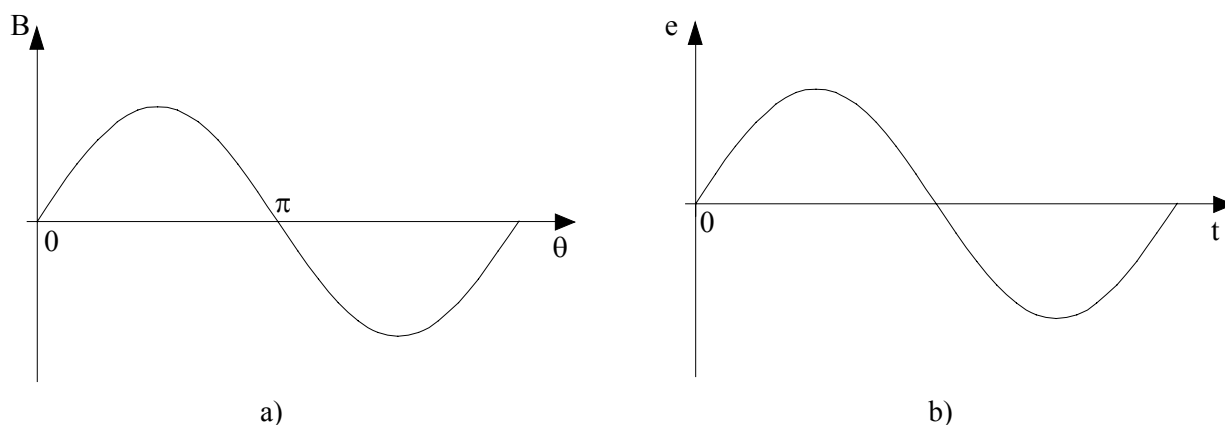


Figura 5.3.- a) Distribución espacial de B ; b) Onda de tensión inducida

La tensión inducida pasa por un ciclo completo de valores por cada revolución de la máquina de dos polos de la Figura 5.2.- Su frecuencia en ciclos por segundo (hertz) es igual a la velocidad del rotor en revoluciones por segundo, es decir, la frecuencia eléctrica está sincronizada con la velocidad mecánica, razón

por la cual, estas máquinas se denominan síncronas. De acuerdo con esto, una máquina síncrona de dos polos debe girar a 50 rps (revoluciones por segundo) es decir 3000 rpm (revoluciones por minuto) para generar una tensión con una frecuencia de 50 Hz.

La mayor parte de las máquinas síncronas tienen más de dos polos, en cuyo caso puede considerarse únicamente un par de ellos, teniendo en cuenta que las condiciones eléctricas, magnéticas y mecánicas relativas a cada uno de los restantes, no son más que una repetición de las existentes para el par considerado. Por este motivo resulta más conveniente expresar los ángulos como θ en grados o radianes eléctricos, más que como θ_m en unidades geométricas o mecánicas corrientes. Un par de polos o un ciclo de distribución de flujo en una máquina de P polos equivale a 360° eléctricos o a 2π radianes eléctricos, y puesto que en una revolución completa existen $P/2$ ondas o ciclos, se tiene que:

$$\theta = \frac{P}{2} \theta_m \quad (5.1)$$

La frecuencia angular ω de la tensión inducida se puede obtener derivando la expresión (5.1) respecto al tiempo, es decir:

$$\omega = \frac{P}{2} \omega_m \quad (5.2)$$

De donde la frecuencia f de la onda de tensión inducida en Hz y la velocidad mecánica n en rpm quedan relacionadas como:

$$f = \frac{P}{2} \frac{n}{60} \quad (5.3)$$

El rotor mostrado en la Figura 5.2 es de polos salientes con los devanados concentrados, mientras que el de la Figura 5.4 es de polos no salientes o cilíndrico, en el que el bobinado está distribuido, alojado en ranuras y dispuesto de manera que el campo es de dos polos y aproximadamente sinusoidal. El uso de uno u otro tipo de rotor depende del tipo de aplicación de la máquina.

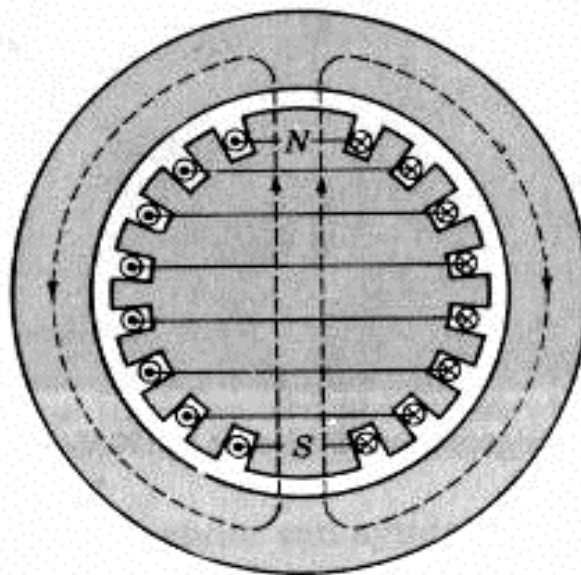


Figura 5.4.- Devanado inductor elemental de dos polos sobre rotor cilíndrico

El rotor de polos salientes se utiliza en generadores hidroeléctricos, debido a que las velocidades de las turbinas hidráulicas son bajas y se requiere un número de polos relativamente alto para conseguir la frecuencia normalmente usada en los sistemas de potencia (50 Hz). En cambio, los turboalternadores (movidos por turbinas a vapor o gas) funcionan a gran velocidad, por lo que acostumbran a tener 2 ó 4 polos, siendo el rotor cilíndrico.

Los generadores síncronos mostrados son monofásicos; sin embargo, la gran mayoría es de tipo trifásico, debido a las ventajas que este sistema tiene en la producción, transmisión y utilización de grandes potencias. Para la creación de tres tensiones desfasadas 120 grados eléctricos entre sí, se necesitan por lo menos tres bobinas desplazadas 120° eléctricos, tal como se muestra en la Figura 5.5.

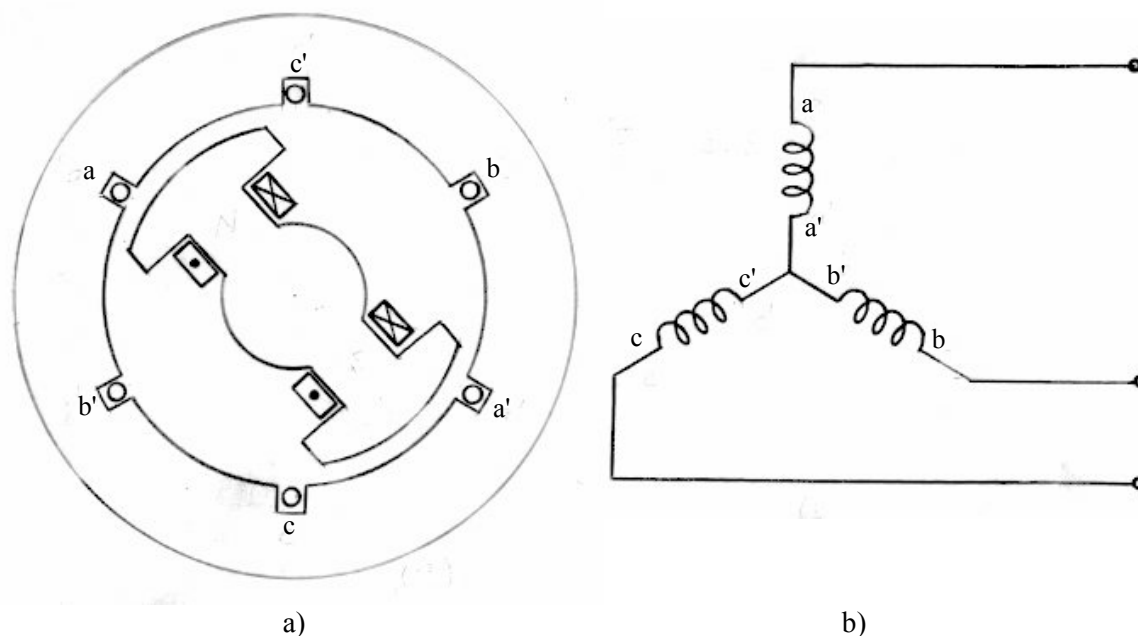


Figura 5.5.- Generador trifásico elemental a) Representación esquemática, b) Conexión en estrella de los enrollados

La máquina síncrona, puede también utilizarse como motor síncrono, cuya velocidad depende del número de polos y de la frecuencia de la corriente de alimentación, de la misma forma que lo expuesto para el generador síncrono, es decir, según las expresiones (5.2) y (5.3). Por lo tanto, un motor síncrono alimentado por corriente alterna de frecuencia constante girará a velocidad constante (velocidad síncrona).

En ambos casos, funcionando como motor o como generador, existe un torque electromagnético y una fuerza contraelectromotriz, siendo éstos los fenómenos más importantes en la Conversión Electromecánica de la Energía.

5.2.2.- Máquinas elementales de Corriente Continua (C.C.)

El devanado inducido de un generador de C.C. ó dínamo está situado en el rotor, tomándose la corriente de él, a través de escobillas de carbón. El devanado inductor está en el estator y se excita con Corriente Continua. En la Figura 5.6 a) se representa esquemáticamente una dínamo muy elemental de dos polos. El bobinado inducido consiste en una única bobina de N espiras, cuyos laterales a y a' están situados paralelamente al eje y diametralmente opuestas en el rotor. Este gira a velocidad uniforme, arrastrado mecánicamente por su eje. El flujo en el entrehierro se distribuye según una onda aproximadamente plana como se muestra en la Figura 5.6 b), en lugar de hacerlo en forma sinusoidal como en las máquinas de

corriente alterna. La rotación de la bobina induce en ella una tensión que es función del tiempo y cuya forma de onda es semejante a la de la distribución espacial de la densidad de flujo.

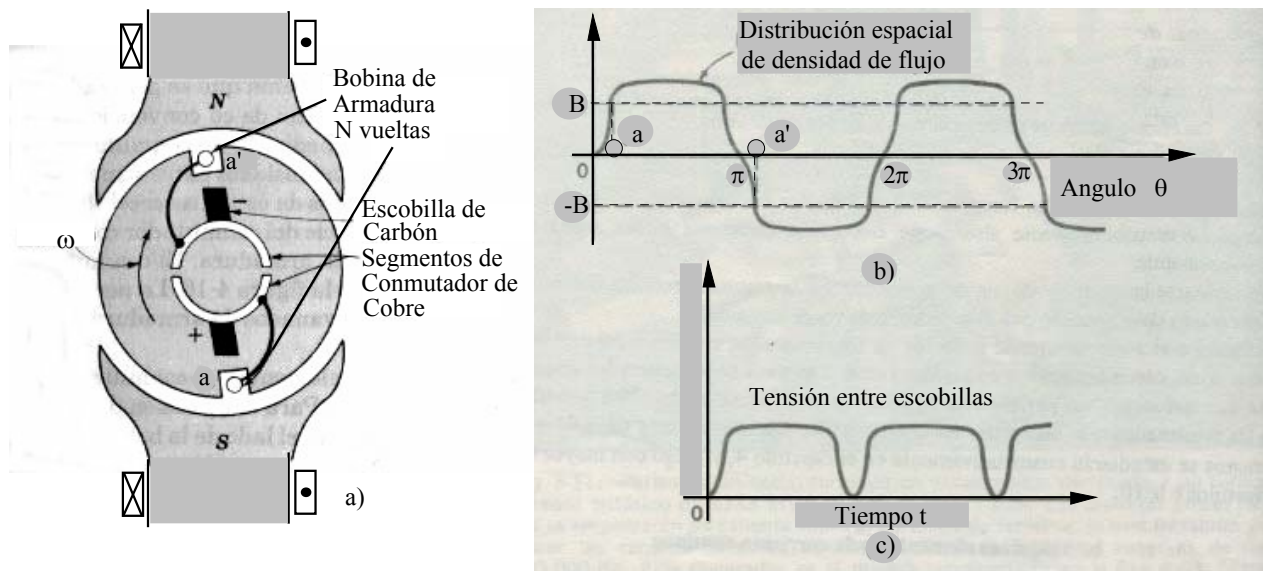


Figura 5.6.- a) Esquema de una dinamo elemental; b) Distribución espacial de B ; c) Onda rectificada de tensión entre escobillas

Como el objetivo de la máquina es generar una tensión continua, es necesario rectificar la alterna producida, lo que se puede hacer exteriormente, a través de rectificadores de semiconductores, por ejemplo, en cuyo caso la máquina es un alternador. En las dinamos clásicas, la rectificación se hace mecánicamente por medio del colector, que es un cilindro formado por segmentos de cobre, denominados delgas aislados entre si y montados sobre el mismo eje del rotor (aunque eléctricamente aislado de él). A través de unas escobillas fijas que se apoyan sobre la superficie del colector se conecta el devanado inducido con el circuito exterior. Esta es la razón por la cual las máquinas de C.C. tienen el inducido en el rotor.

Para la máquina elemental de la Figura 5.6 a), la onda de tensión entre escobillas, es la que se muestra en la Figura 5.6 c), considerando una distribución espacial de B , tal como la de la Figura 5.6.b).

La máquina descrita puede funcionar también como motor, en cuyo caso se debe aplicar una corriente continua al inducido a través del colector. Tanto si funciona como motor o como generador, se producirá una fuerza electromotriz inducida y un torque electromagnético.

5.2.3.- Máquinas elementales de inducción

En estas máquinas, circulan corrientes alternas tanto en el rotor como en el estator. Se utilizan habitualmente como motores, en los que la corriente alterna se aplica directamente al devanado del estator y por inducción (al igual que el transformador) en el rotor, produciéndose un cambio de frecuencia y apareciendo una potencia mecánica. Raramente se utilizan como generadores, debido a que son inadecuados para muchas aplicaciones. Se emplean también como cambiadores de frecuencia.

La Figura 5.7 muestra en forma esquemática, una máquina de inducción con “Rotor tipo Jaula de Ardilla”. El devanado del estator es semejante al de la máquina síncrona. En el rotor, el devanado está habitualmente cortocircuitado y es frecuente que no tenga terminales exteriores. La relación entre la velocidad y el torque es tal, que al aumentar la carga en el eje, la velocidad disminuye ligeramente (deslizamiento).

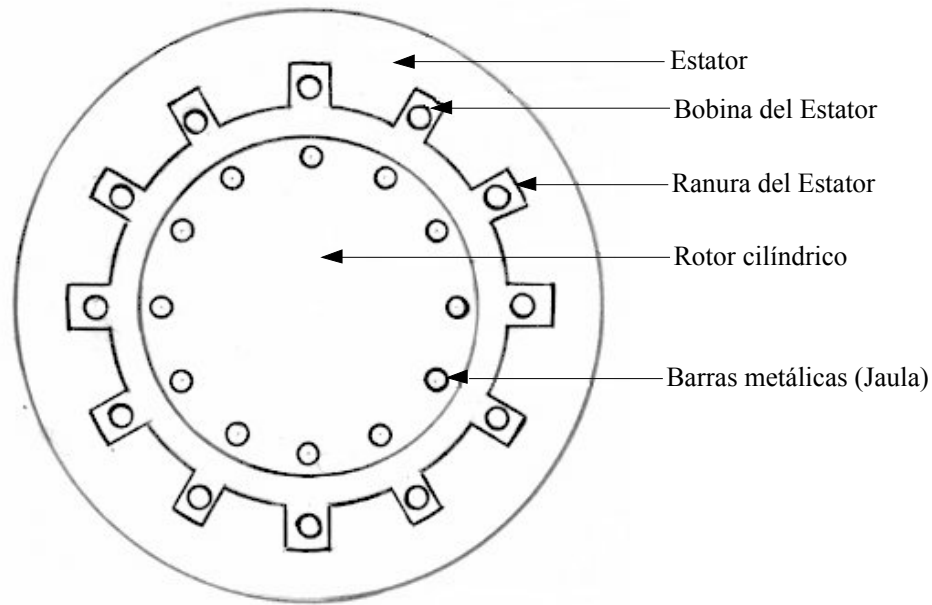


Figura 5.7.- Esquema de una máquina de Inducción con rotor tipo Jaula de Ardilla

5.3.- Tensiones inducidas

El estudio de las tensiones inducidas en cualquiera de los devanados de una máquina rotatoria, se reduce a determinar la tensión inducida en las bobinas simples, sumando luego las tensiones individuales de todas las que forman el devanado completo, considerando la forma en que están conectadas entre si. La naturaleza de las tensiones inducidas se estudió en 5.2. A continuación se determinará su magnitud utilizando la ley de Faraday.

5.3.1.- Máquinas de Corriente Alterna (C.A.)

La Figura 5.8 muestra la sección de una máquina elemental de C.A. El bobinado inducido está formado por una bobina única de N espiras, que abarca 180° eléctricos, o sea, un paso polar completo. La densidad de flujo B creada por el devanado inductor del rotor se puede suponer con una distribución sinusoidal a lo largo de la superficie del estator. El rotor gira a la velocidad angular uniforme de ω rad eléctricos/seg.

Cuando los polos del rotor están alineados con el eje magnético de la bobina del estator, el flujo enlazado con ésta es $N\phi$, siendo ϕ el flujo por polo en el entrehierro. Para la distribución de B supuesta, se tiene:

$$B(\theta) = B_{\text{máx}} \cos \theta \quad (5.4)$$

donde $B_{\text{máx}}$ es el valor máximo de B (en el centro del polo del rotor) y θ es el ángulo en radianes eléctricos medido desde el eje magnético del rotor. El flujo ϕ por polo en el entrehierro se puede determinar como:

$$\phi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} l r B_{\text{máx}} \cos \theta d\theta = 2 l r B_{\text{máx}} \quad (5.5)$$

En que l es la longitud axial del rotor y r su radio en el entrehierro.

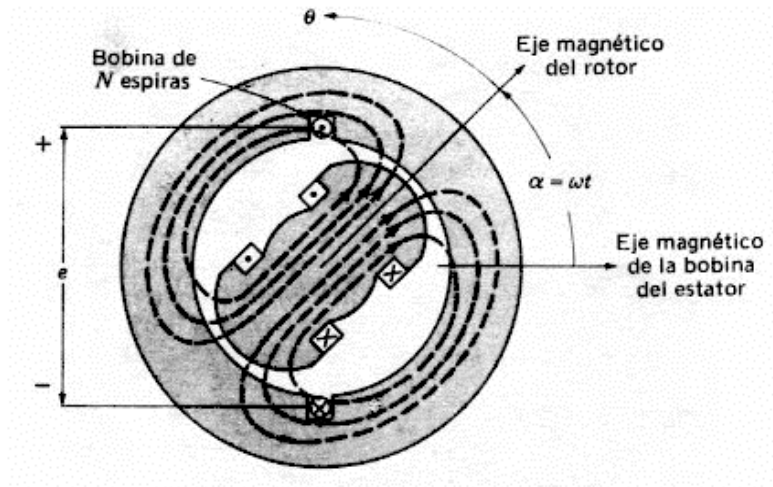


Figura 5.8.- Flujos en una máquina elemental de Corriente Alterna de 2 Polos

En una máquina de P polos, el área correspondiente a cada polo es $2/P$ veces la que tendría una máquina de dos polos de igual longitud y diámetro; luego, el flujo ϕ es de la forma:

$$\phi = \frac{2}{P} 2 l r B_{\text{máx}} \quad (5.6)$$

Al girar el rotor, el flujo enlazado varía con el coseno del ángulo α . Si el rotor gira a la velocidad angular ω , $\alpha = \omega t$ y el flujo enlazado por la bobina del estator λ es:

$$\lambda = N \phi \cos \omega t \quad (5.7)$$

donde $t=0$ cuando la máxima densidad de flujo coincide con el eje magnético de la bobina del estator. Según la ley de Faraday; la tensión inducida e en la bobina es:

$$e(t) = -\frac{d\lambda}{dt} = \omega N \phi \sin \omega t - N \frac{d\phi}{dt} \cos \omega t \quad (5.8)$$

El signo menos que aparece en esta expresión tiene relación con las referencias direccionales de la Figura 5.8, es decir, que al disminuir el flujo enlazado por la bobina, se induce en ella una tensión de signo tal que tienda a producir una corriente que se oponga a esa disminución.

El primer término del segundo miembro de la ecuación (5.8) es la tensión inducida por el movimiento relativo entre la bobina y el campo. El segundo término corresponde al efecto de transformador, que existirá únicamente si hay variación del flujo ϕ respecto al tiempo, lo que en la mayor parte de las máquinas rotatorias no ocurre. Por ello, se tiene simplemente que:

$$e(t) = \omega N \phi \sin \omega t = E_{\text{máx}} \sin \omega t \quad (5.9)$$

donde:

$$E_{\text{máx}} = \omega N \phi = 2 \pi f N \phi \quad (5.10)$$

Cuyo valor eficaz o efectivo E_{ef} , para una frecuencia f en Hz es:

$$E_{\text{ef}} = \frac{E_{\text{máx}}}{\sqrt{2}} = 4,44 f N \phi \quad (5.11)$$

Estas ecuaciones son idénticas a las obtenidas en los transformadores. Es decir, el movimiento relativo entre la bobina y una onda de distribución espacial de densidad de flujo de amplitud constante en una máquina rotatoria, produce los mismos efectos, en cuanto a tensiones se refiere, que la variación de flujo y bobinas fijas de un transformador.

La tensión inducida es monofásica. Para obtener un sistema trifásico de tensiones, se requiere tres bobinas desplazadas 120° eléctricos entre sí, tal como se indicó en la Figura 5.5. En este caso, la ecuación (5.11) da la tensión efectiva por fase si N es el número total de espiras en serie por cada fase.

Todos estos devanados elementales son concentrados y abarcan un paso polar, ya que los dos lados de cualquier bobina están separados 180° eléctricos y todas sus espiras están concentradas en un par de ranuras. En la práctica, las bobinas del inducido correspondiente a cada fase se distribuyen en un cierto número de ranuras, con el fin de aprovechar mejor el material del núcleo y de los conductores y además mejorar la forma de onda. En ese caso, las tensiones inducidas en cada una de las bobinas que forman un grupo de fase, quedan algo desfasadas entre sí, por lo que al conectarlas en serie, su suma vectorial es menor que la suma aritmética, siendo necesario introducir un factor de reducción K_ω , el que en general, para bobinados trifásicos, se acota entre 0,85 y 0,95. Así entonces, para devanados distribuidos, de N_f espiras en serie por fase, la expresión (5.11) queda:

$$E_{ef} = 4,44 f K_\omega N_f \phi \quad (5.12)$$

5.3.2.- Máquinas de corriente Continua (C.C.)

Con el colector elemental de la Figura 5.6 a), se produce una rectificación mecánica de onda completa. Suponiendo siempre una distribución sinusoidal del flujo, la onda de tensión entre escobillas tiene la forma indicada en la Figura 5.9. La tensión media (continua) entre escobillas E_a es:

$$E_a = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \omega N \phi \sin \omega t d(\omega t) = \frac{2}{\pi} \omega N \phi \quad (5.13)$$

Para una máquina de P polos y expresando la tensión en función de la velocidad mecánica ω_m se tiene, según (5.2)

$$E_a = \frac{P N \phi \omega_m}{\pi} \quad (5.14)$$

Si la velocidad mecánica se expresa en rpm se tiene:

$$E_a = \frac{2 P N \phi n}{60} \quad (5.15)$$

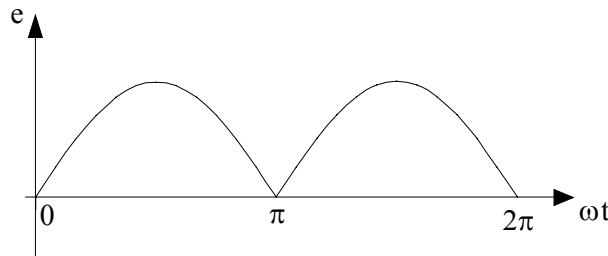


Figura 5.9.- Tensión entre escobillas de una máquina de C.C. elemental

A pesar de que la bobina única aquí supuesta no es lo que se tiene en la realidad, las ecuaciones (5.14) y (5.15) son válidas para la mayor parte de los devanados de C.C., siempre que N corresponda al número total de espiras en serie comprendida entre los terminales del inducido.

Normalmente, la tensión se expresa en función del número total de conductores activos “ Z ” y del número “ a ” de circuitos en paralelo del devanado. De esta forma, el número total de espiras en serie N es:

$$N = \frac{Z}{2a} \quad (5.16)$$

Por lo tanto:

$$E_a = \frac{\omega Z}{\pi a} \phi = \frac{P Z \omega_m}{2 \pi a} \phi = \frac{P Z n}{60 a} \phi \quad (5.17)$$

5.4.- Fuerzas magnetomotrices de los devanados distribuidos

5.4.1.- Devanado de paso completo

La mayor parte de los inducidos tienen el devanado distribuido; es decir, repartido sobre un determinado número de ranuras alrededor de la periferia del entrehierro. Las bobinas individuales se conectan entre sí de forma que el campo magnético resultante tenga el mismo número de polos que el devanado inductor.

De la misma forma que se hizo para el estudio de las tensiones inducidas, los campos magnéticos de los devanados distribuidos pueden estudiarse por aproximación, analizando el campo producido por una bobina única de N espiras tal como se muestra en la Figura 5.10. Como la permeabilidad del núcleo del inducido y del inductor es muy superior a la del aire, se puede suponer que la energía almacenada se encuentra confinada sólo en los entrehierros ($H_{Fe}=0$). Por otra parte, se pueden despreciar los flujos de dispersión y considerar además, que el rotor y el estator tienen superficies lisas, es decir, no tomar en cuenta el efecto de las ranuras. Para entender mejor como determinar la fuerza magnetomotriz (fmm) a partir de las leyes de campos y de las condiciones de simetría, consideremos la Figura 5.10.

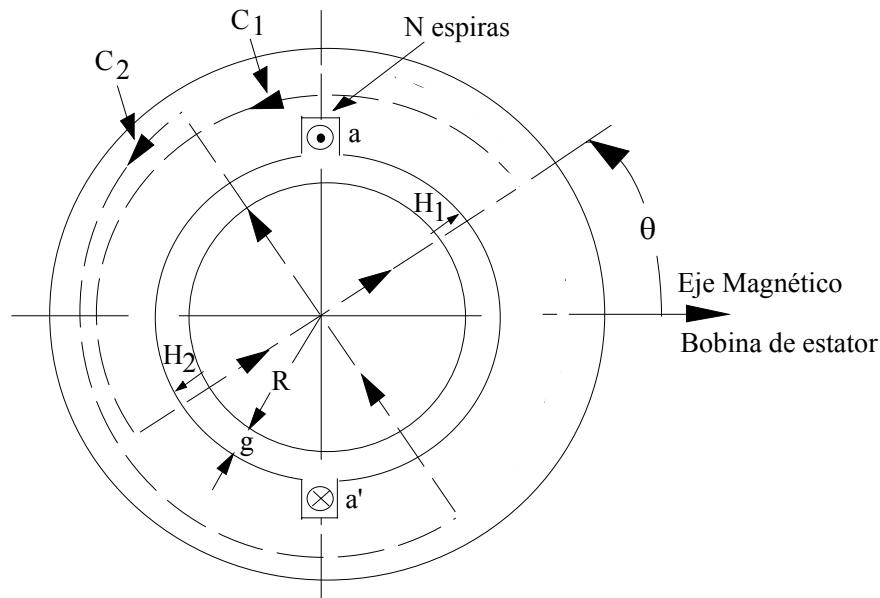


Figura 5.10.- Determinación de la fmm de una bobina concentrada de paso diametral

Aplicando ley circuital de Ampere en la trayectoria cerrada C_1 se tiene:

$$H_1 g - H_2 g = N i \quad (5.18)$$

Por condiciones de simetría, $H_1 = -H_2$, donde:

$$H_1 = H(\theta) \quad \text{y} \quad H_2 = H(\theta + \pi) \quad (5.19)$$

Resolviendo estas ecuaciones se obtiene:

$$F(\theta) = H(\theta)g = \frac{Ni}{2} \quad \text{para} \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \quad (5.20)$$

Considerando la trayectoria C_2 , el resultado es:

$$F(\theta) = H(\theta)g = -\frac{Ni}{2} \quad \text{para} \quad \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2} \quad (5.21)$$

Desarrollando en forma rectilínea (5.20) y (5.21) se obtiene la onda de distribución de fmm mostrada en la Figura 5.11.

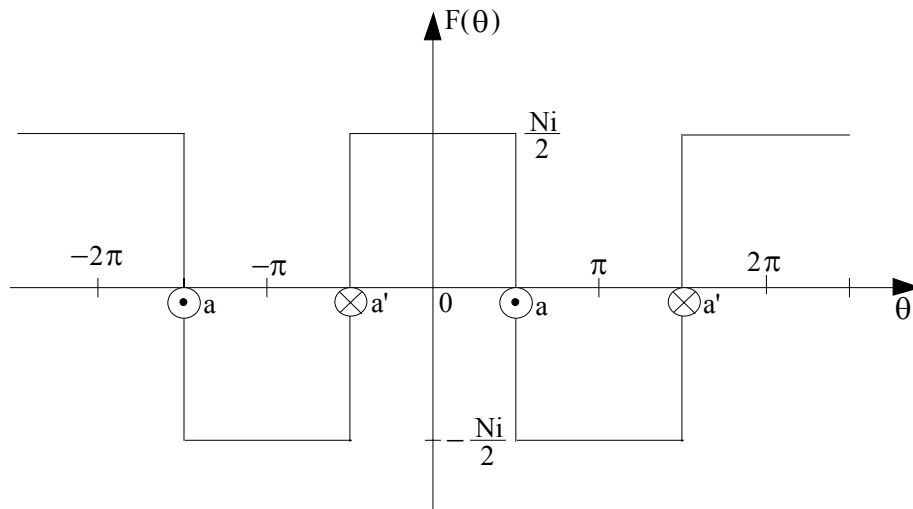


Figura 5.11.- Distribución de fmm en una bobina concentrada de paso diametral

En cuanto a la distribución de la inducción magnética $B(\theta)$, dado que el entrehierro es uniforme y su permeabilidad es μ_0 , tiene la misma forma de $F(\theta)$, es decir:

$$B(\theta) = \frac{\mu_0}{g} F(\theta) = \frac{\mu_0 N i}{2 g} \quad \text{para} \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \quad (5.22)$$

$$B(\theta) = \frac{\mu_0}{g} F(\theta) = -\frac{\mu_0 N i}{2 g} \quad \text{para} \quad \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$$

Consideremos ahora, una máquina con cuatro bobinas de paso completo (diametral), tal como se muestra en la Figura 5.12.

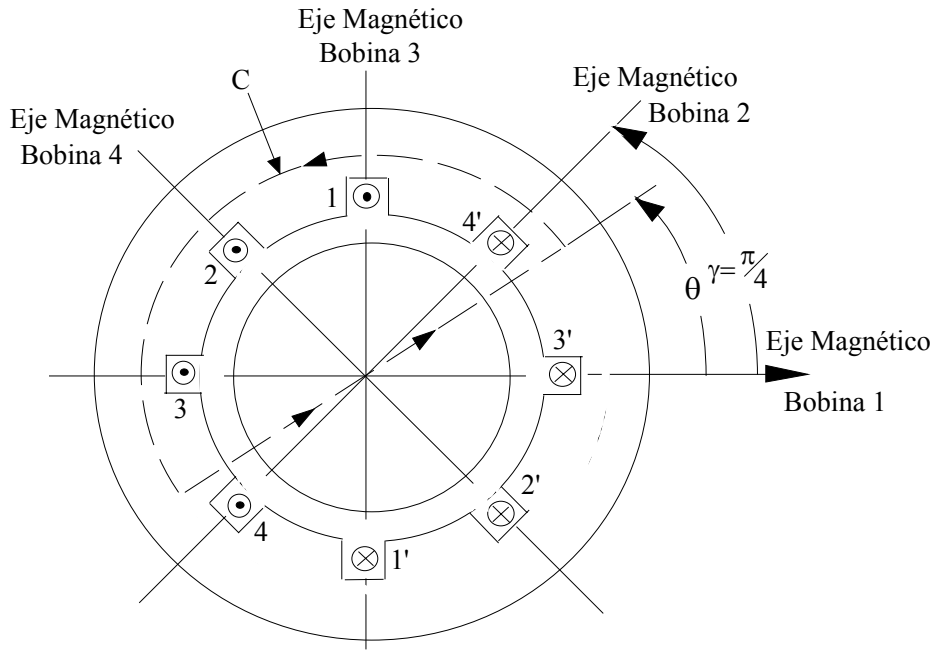


Fig. 5.12.- Cuatro bobinas concentradas de paso completo

Al aplicar la ley circuital de ampere, se deben considerar 8 trayectorias distintas, ya que la separación entre bobinas γ es de $\pi/4$ radianes, lo que hace bastante engorroso el proceso. Sin embargo, como se ha supuesto que el sistema es lineal, puede calcularse separadamente al aporte de cada bobina, sumando los resultados. De todas formas, al aumentar el número de bobinas, el proceso de cálculo por cualquiera de los dos métodos es largo y complejo.

Como se aprecia en la Figura 5.12; el eje magnético de la bobina 2 está desplazado en $\pi/4$ radianes, respecto al de la bobina 1, por lo que según (5.20) y (5.21) podemos escribir, la fmm de la bobina 2 como:

$$\begin{aligned} F_2(\theta) &= \frac{Ni}{2} & \text{para } -\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{4} \\ F_2(\theta) &= -\frac{Ni}{2} & \text{para } \frac{3\pi}{4} < \theta < \frac{7\pi}{4} \end{aligned} \quad (5.23)$$

Para la bobina 3, el eje queda desplazado en $\pi/2$ radianes, luego:

$$\begin{aligned} F_3(\theta) &= \frac{Ni}{2} & \text{para } 0 < \theta < \pi \\ F_3(\theta) &= -\frac{Ni}{2} & \text{para } \pi < \theta < 2\pi \end{aligned} \quad (5.24)$$

Para la bobina 4, el eje queda desplazado en $3\pi/4$ radianes y por lo tanto:

$$\begin{aligned} F_4(\theta) &= \frac{Ni}{2} & \text{para } \frac{\pi}{4} < \theta < \frac{5\pi}{4} \\ F_4(\theta) &= -\frac{Ni}{2} & \text{para } \frac{5\pi}{4} < \theta < \frac{9\pi}{4} \end{aligned} \quad (5.25)$$

Los desarrollos rectilíneos para cada bobina, así como la suma, se muestran en la Figura 5.13. A partir de estos resultados podemos concluir que la fmm total tiene un valor máximo $F_{\text{máx}}$ dado por:

$$F_{\text{máx}} = 4 \frac{Ni}{2} \quad (5.26)$$

Es decir, siendo n el número de bobinas podríamos escribir en forma general:

$$F_{\text{máx}} = n \frac{Ni}{2} \quad (5.27)$$

El método presentado es una forma gráfica de obtención de la fmm resultante y se puede esperar que a medida que el número de bobinas aumenta, la onda de fmm se asemeje a una onda triangular. Es importante señalar que al proyectar máquinas de corriente alterna, se trata en lo posible que el devanado se distribuya en forma tal, que la fmm resultante se aproxime a una onda senoidal.

La onda rectangular de fmm mostrada en la Figura 5.11, puede descomponerse por el método de Fourier en una componente fundamental y una serie de armónicos, de la forma general:

$$F(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{\frac{k-1}{2}} \frac{4}{\pi} \frac{Ni}{2} \frac{\cos k \theta}{k} \quad \text{para todo } k \text{ impar} \quad (5.28)$$

La fundamental, es decir para $k=1$, es:

$$F_1(\theta) = \frac{4}{\pi} \frac{Ni}{2} \cos \theta \quad (5.29)$$

Cuyo valor máximo se tiene cuando $\theta=0$, es decir, en el eje magnético de la bobina.

Como el devanado se distribuye en varias ranuras, la fmm total (resultante) debe ser menor que la suma de los componentes de cada una de las bobinas individuales, ya que los ejes magnéticos de ellas no coinciden. Así entonces, la fundamental de la fmm resultante $F_{1R}(\theta)$, considerando n bobinas, queda:

$$F_{1R}(\theta) = \frac{4}{\pi} \frac{Ni}{2} n K_{d1} \cos \theta \quad (5.30)$$

Si por ejemplo: $i = \sqrt{2} I \cos(\omega t - \phi)$ se tiene:

$$F_{1R}(\theta) = 0,9 N n I K_{d1} \cos(\omega t - \phi) \cos \theta \quad (5.31)$$

Donde K_{d1} es el coeficiente de distribución para la fundamental y vale:

$$K_{d1} = \frac{\sin \frac{n \gamma}{2}}{n \sin \frac{\gamma}{2}} \quad (5.32)$$

En que γ es el ángulo eléctrico de desplazamiento entre las bobinas, cuyo valor, en este caso es:

$$\gamma = \frac{\pi}{n} \text{ rad} \quad (5.33)$$

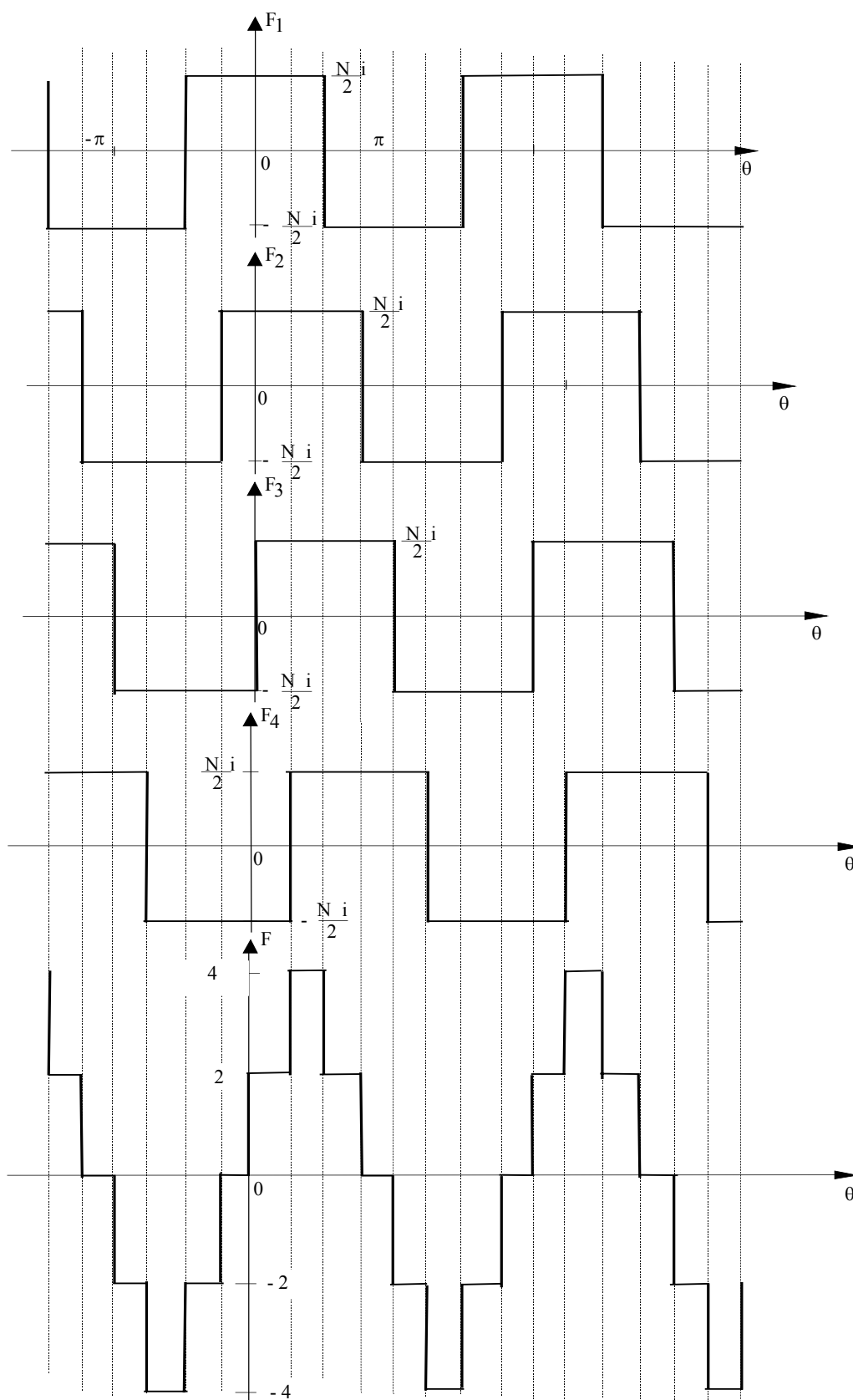


Figura 5.13.- Fuerza magnetomotriz resultante de 4 bobinas de paso completo

5.4.2.- Devanado de paso fraccionario

Consideremos la Figura 5.14, que muestra una bobina cuyos lados están a menos de 180° .

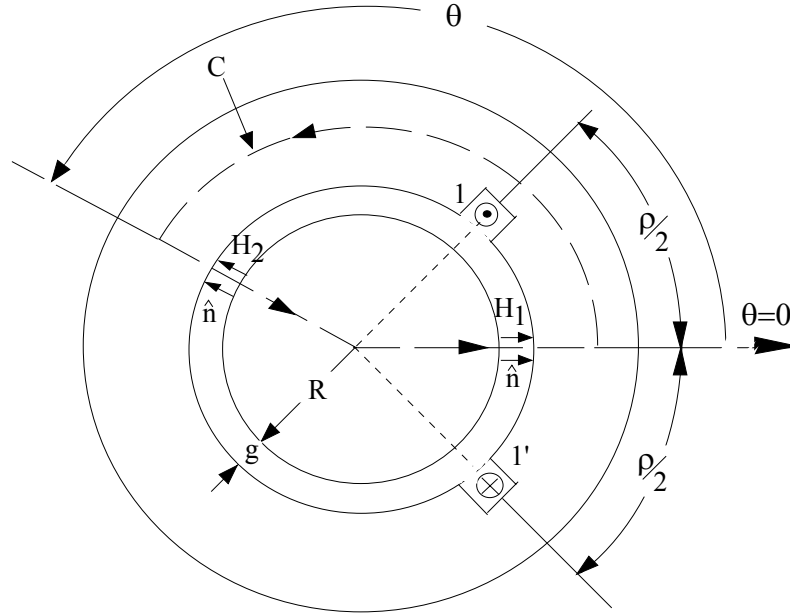


Figura 5.14.- Bobina de paso fraccionario

Aplicando la ley circuital de Ampere en C, se tiene:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = N i \Rightarrow \vec{H}_1 \cdot \vec{l}_1 + \vec{H}_2 \cdot \vec{l}_2 = N i \quad (5.34)$$

Pero, en la Figura 5.14 se observa que:

$$\begin{aligned} \vec{H}_1 &= H(\theta=0) \hat{r} = H(0) \hat{r} & \vec{H}_2 &= H(\theta=\theta) \hat{r} = H(\theta) \hat{r} \\ \vec{l}_1 &= l(\theta=0) \hat{r} = g \hat{r} & \vec{l}_2 &= l(\theta=\theta) (-\hat{r}) = -g \hat{r} \end{aligned} \quad (5.35)$$

Por lo tanto, en (5.34) se tiene:

$$H(0)g - H(\theta)g = N i \quad (5.36)$$

o bien:

$$F(0) - F(\theta) = N i \quad (5.37)$$

Evaluando para distintos valores de θ , se obtiene:

$$\begin{aligned} F(\theta) &= F(0) & \text{para } -\frac{\rho}{2} < \theta < \frac{\rho}{2} \\ F(\theta) &= F(0) - N i & \text{para } \frac{\rho}{2} < \theta < 2\pi - \frac{\rho}{2} \end{aligned} \quad (5.38)$$

Para determinar $F(0)$, usaremos la ley de conservación de flujo en el rotor, de largo l .

$$\oint_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA = 0 \quad (5.39)$$

donde:

$$\begin{aligned} \vec{B} &= B \hat{r} \\ \hat{n} &= \hat{r} \\ dA &= R l d\theta \end{aligned} \quad (5.40)$$

$$\oint_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA = \int_{-\rho/2}^{\rho/2} B(\theta) R l d\theta + \int_{\rho/2}^{2\pi-\rho/2} B(\theta) R l d\theta = 0 \quad (5.41)$$

pero en el entrehierro, $B(\theta) = \mu_0 F(\theta) / g$ y por lo tanto a partir de (5.41) se obtiene $F(0)$ y de esta forma, $F(\theta)$ queda:

$$\begin{aligned} F(\theta) &= Ni \frac{2\pi - \rho}{2\pi} & \text{para } -\frac{\rho}{2} < \theta < \frac{\rho}{2} \\ F(\theta) &= -Ni \frac{\rho}{2\pi} & \text{para } \frac{\rho}{2} < \theta < 2\pi - \frac{\rho}{2} \end{aligned} \quad (5.42)$$

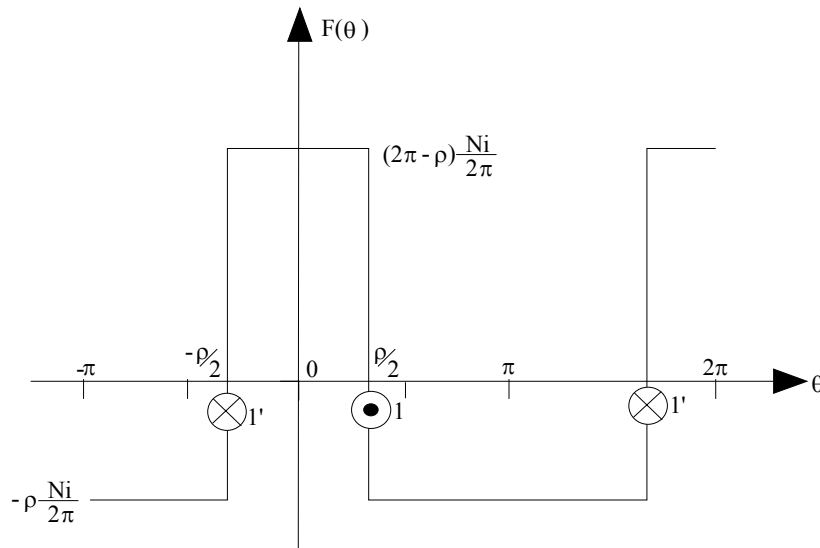


Fig. 5.15.- Distribución de fmm para una bobina de paso fraccionario

La Figura 5.15 muestra la distribución de fmm, que como se aprecia es asimétrica. Al desarrollarla en serie de Fourier se obtiene:

$$F(\theta) = \frac{4}{\pi} \frac{Ni}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{K_{pk}}{k} \cos k \theta \quad (5.43)$$

donde el “Factor de Paso” K_{pk} para el k -ésimo ($k=1,2,3,\dots$) armónico es:

$$\begin{aligned}
 F(\theta) &= 2 \frac{Ni}{2} & 0 < \theta < \frac{\rho}{2} \\
 F(\theta) &= 0 & \frac{\rho}{2} < \theta < \pi - \frac{\rho}{2} \\
 F(\theta) &= -2 \frac{Ni}{2} & \pi - \frac{\rho}{2} < \theta < \pi + \frac{\rho}{2} \\
 F(\theta) &= 0 & \pi + \frac{\rho}{2} < \theta < 2\pi - \frac{\rho}{2} \\
 F(\theta) &= 2 \frac{Ni}{2} & 2\pi - \frac{\rho}{2} < \theta < 2\pi
 \end{aligned} \tag{5.47}$$

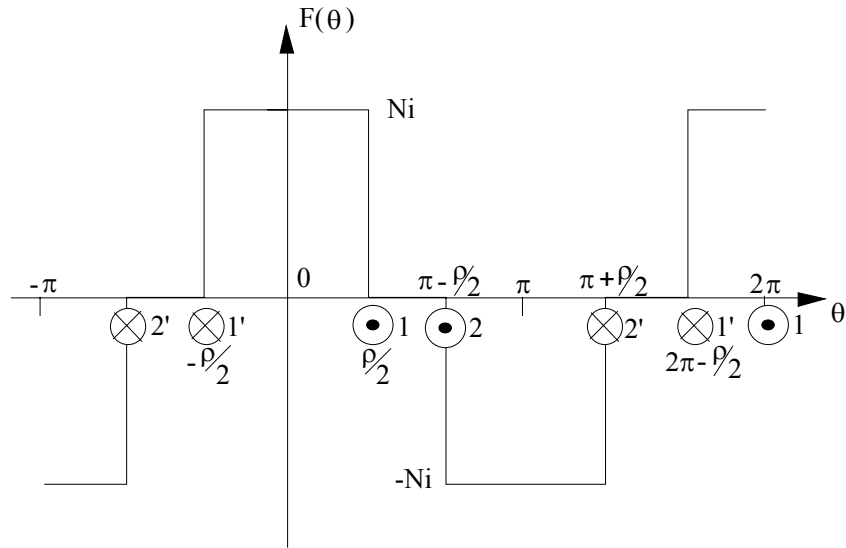


Fig. 5.17.- Distribución de fmm de dos bobinas de paso fraccionario

La Figura 5.17, corresponde a la distribución de la fuerza magnetomotriz que, como se puede apreciar, es simétrica, en cuyo caso el desarrollo en serie de Fourier no contiene armónicos pares. Por lo tanto, para n bobinas de paso fraccionario, la fmm resultante se puede escribir:

$$F(\theta) = \frac{4}{\pi} \frac{Ni}{2} n \sum_{k=1}^{\infty} K_{pk} K_{dk} \frac{\cos k \theta}{k} \tag{5.48}$$

Donde el Factor de Paso K_{pk} fue definido en (5.44) y el Factor de Distribución para el k -ésimo armónico K_{dk} es:

$$K_{dk} = \frac{\sin \frac{n k \gamma}{2}}{n \sin \frac{k \gamma}{2}} \tag{5.49}$$

Por otra parte se puede definir ahora el Factor de Devanado K_{wk} , para el k -ésimo armónico como el producto entre el Factor de Distribución y el Factor de Paso, es decir:

$$K_{wk} = K_{dk} K_{pk} \tag{5.50}$$

5.5.- Torque en máquinas de polos no salientes

El funcionamiento de cualquier dispositivo electromagnético, como componente de un sistema electromecánico, puede definirse en función de las ecuaciones de tensión (Ley de Kirchhoff) y su torque electromagnético. Deduciremos aquí, las ecuaciones de tensiones y torque considerando una máquina elemental; sin embargo, los resultados pueden aplicarse luego, a máquinas más complejas. Para la deducción, se puede partir de dos puntos de vista distintos, a saber, el punto de vista de circuitos magnéticos acoplados, o bien haciendo el estudio directamente del campo magnético. Se puede demostrar que básicamente, ambos conducen a resultados semejantes. En este curso obtendremos el torque, considerando solamente el punto de vista de circuitos magnéticos acoplados.

Consideremos la máquina elemental de la Figura 5.18, con un devanado en el estator (s) y otro en el rotor (r), distribuidos en un cierto número de ranuras de forma que la onda de distribución de fmm espacial sea aproximadamente senoidal. En la Figura 5.18 a), los lados de bobina s, s' y r, r'; señalan la posición central de la zona abarcada por los conductores distribuidos, pudiéndose representar también éstos, en la forma mostrada en la Figura 5.18 b), donde se ha indicado además, la dirección de las tensiones y corrientes (flujos).

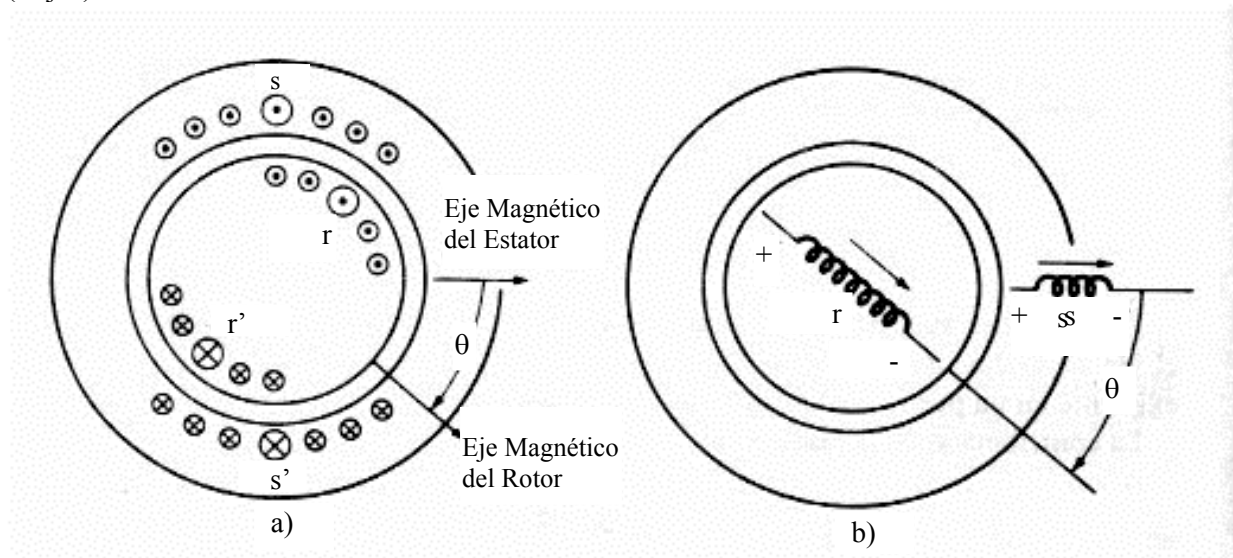


Figura 5.18.- Máquina elemental de dos polos con entrehierro uniforme. a) Distribución de los devanados, b) representación esquemática

Con las mismas consideraciones hechas en 5.4.1, podemos decir que las autoinductancias del estator L_{ss} y del rotor L_{rr} son constantes, pero la inductancia mutua estator-rotor L_{sr} depende del ángulo θ , de manera que tiene un máximo positivo cuando $\theta = 0$ ó 2π ; se anula para $\theta = \pm\pi/2$ y tiene un máximo negativo cuando $\theta = \pm\pi$. Si las ondas de distribución de fmm son senoidales y el entrehierro es uniforme se tendrá que:

$$L_{sr}(\theta) = L_{sr} \cos \theta \quad (5.51)$$

En que L_{sr} es el valor máximo (constante) de $L_{sr}(\theta)$, el que se obtiene cuando coinciden los ejes magnéticos del estator y rotor.

Por otra parte, los flujos enlazados por el estator λ_s y rotor λ_r son, respectivamente:

$$\begin{aligned} \lambda_s &= L_{ss} i_s + L_{sr}(\theta) i_r \\ \lambda_r &= L_{sr}(\theta) i_s + L_{rr} i_r \end{aligned} \quad (5.52)$$

o bien, en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \lambda_s \\ \lambda_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{ss} & L_{sr}(\theta) \\ L_{sr}(\theta) & L_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s \\ i_r \end{bmatrix} \quad (5.53)$$

Las tensiones en los terminales, considerando que los devanados tienen resistencias R_s y R_r para el estator y rotor respectivamente son:

$$\begin{aligned} v_s &= R_s i_s + \frac{d\lambda_s}{dt} \\ v_r &= R_r i_r + \frac{d\lambda_r}{dt} \end{aligned} \quad (5.54)$$

es decir:

$$\begin{aligned} v_s &= R_s i_s + L_{ss} \frac{di_s}{dt} + L_{sr} \cos \theta \frac{di_r}{dt} - L_{sr} i_r \sin \theta \frac{d\theta}{dt} \\ v_r &= R_r i_r + L_{rr} \frac{di_r}{dt} + L_{sr} \cos \theta \frac{di_s}{dt} - L_{sr} i_s \sin \theta \frac{d\theta}{dt} \end{aligned} \quad (5.55)$$

en que $d\theta/dt$ es la velocidad instantánea en radianes eléctricos por segundo. Los segundos y terceros términos del segundo miembro de (5.55) son tensiones inducidas semejantes a las que se obtienen en circuitos estáticos acoplados, tales como los devanados de transformadores. Los cuartos términos se deben al movimiento mecánico y relacionan el intercambio de potencia entre los sistemas eléctrico y mecánico.

El torque electromagnético puede evaluarse a partir de la coenergía del campo magnético en el entrehierro, en que ésta vale:

$$W'_m(i_s, i_r, \theta) = \frac{1}{2} L_{ss} i_s^2 + \frac{1}{2} L_{rr} i_r^2 + L_{sr} i_s i_r \cos \theta \quad (5.56)$$

Luego, el torque eléctrico T^e es de la forma:

$$T^e = \frac{\partial W'_m(i_s, i_r, \theta_m)}{\partial \theta_m} = \frac{\partial W'_m(i_s, i_r, \theta)}{\partial \theta} \frac{d\theta}{d\theta_m} \quad (5.57)$$

Las derivadas se deben hacer respecto al ángulo mecánico θ_m , debido a que se está operando variables mecánicas. Aplicando (5.57) a (5.56) y considerando (5.1) se obtiene finalmente:

$$T^e = -\frac{P}{2} L_{sr} i_s i_r \sin\left(\frac{P}{2} \theta_m\right) \quad (5.58)$$

El torque queda expresado en newton-metro y el signo negativo indica que actúa en un sentido tal, que tiende a alinear los campos magnéticos de estator y rotor.

Las ecuaciones (5.55) y (5.58) constituyen un conjunto de tres ecuaciones diferenciales que relacionan entre sí las variables eléctricas v_s , i_s , v_r , i_r y las variables mecánicas T^e y θ . Estas ecuaciones, junto con las limitaciones impuestas a las variables eléctricas por la red exterior conectada a sus terminales

(alimentación o carga e impedancias exteriores) ó a las variables mecánicas (torques aplicados, inercias, roces, etc.) determinan el comportamiento del dispositivo.

En el caso en que la máquina tenga varios devanados tanto en el rotor como en el estator, se pueden aplicar los mismos principios generales del modelo elemental de la Figura 5.18. Cada devanado tiene su propia autoinducción y su inducción mutua con los restantes. Las inductancias propias y mutuas entre devanados situados en el mismo lado del entrehierro serán constantes bajo las suposiciones hechas. Pero entre devanados situados a uno y otro lado del entrehierro, la inductancia mutua varía con el coseno del ángulo formado por sus respectivos ejes. El torque se puede expresar como suma de términos semejantes a la ecuación (5.58).

En las máquinas de entrehierro no uniforme (de polos salientes), también es posible aplicar estos mismos principios para la determinación del torque. Sin embargo, en este caso, las inductancias propias del estator ó del rotor ó de ambos, dependerán de la posición del rotor; es decir, también serán funciones del ángulo formado por sus respectivos ejes.